中 山 大 学

2017 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：663

科目名称：数学分析

考试时间：2016 年 12 月 25 日 上午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答

以下共十一题，总分 150 分。

一、计算题：请写出必要的计算过程。每题 9 分，共 54 分。

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$

(3) $\iint\limits_{x^2+y^2\le1} e^{-x^2-y^2}dxdy.$

(4) $\int_0^2 dy\int_{y/2}^{1} x^3\cos(x^5)dx.$

(5) $\oint\limits_C ydx+zdy+xdz$，其中 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线，从 ox 轴正向看沿逆时针方向。

(6) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^2}{n!}x^{2n-1}$ 的和函数。

二、(10 分) 判断下列函数是否在 $(0,+\infty)$ 上一致连续，并说明理由。

(1) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$;　　(2) $f(x)=x\ln x$.

三、(10 分) 如果 $u_n>0, n=1,2,\cdots$，为单调递增数列。证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ 当 u_n 有界时收敛，而当 u_n 无界时发散。

四、(10 分) 求证：方程 $e^x=ax^2+bx+c$ 的根不超过三个。

五、(10 分) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上右导数存在，且 $f(a)=f(b)$.

求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'_+(\xi)\le 0$.

六、(10 分) 判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 的收敛性，并说明理由。

七、（10 分）讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}$ 在$(-\infty,+\infty)$上的一致收敛性。

八、（10 分）把函数 $f(x)=(x-\pi)^2$在$(0,\pi)$上展开成余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和。

九、（10 分）计算$\iint\limits_{S}(z^2+x)dydz-zdxdy$，其中$S$为曲面$z=\frac{x^2+y^2}{2},0\le z\le 2$下侧。

十、（10 分）设$f(x)>0,x\in[0,1]$，证明 $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]}\frac{f(x)}{f(y)}dxdy\ge 1$。

十一、(6 分) 设$\{p_n(x)\}$为多项式序列。若级数 $p_1(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(p_{n+1}(x)-p_n(x)\right)$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于$f(x)$。证明：$f(x)$必为一多项式。